

DOI: 10.36910/6775-2524-0560-2020-39-10

УДК 519.876.5; 621.31.33

**Віктор Васильович Лишук**, доцент

<https://orcid.org/0000-0003-4049-8467>

**Микола Миколайович Євсюк**, доцент

<https://orcid.org/0000-0002-3768-8959>

**Йосип Романович Селепина**, доцент

<https://orcid.org/0000-0002-2421-1844>

**Назар Юрійович Копилець**, студент

Луцький національний технічний університет

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРИСТРОЇВ ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

**В.В. Лишук, М.М. Євсюк, Й.Р. Селепина, Н.Ю. Копилець.** Математичні моделі пристроїв перетворювальної техніки. У статті запропоновано математичні моделі однофазних мостових випрямляч та інвертора, диференціальні рівняння яких записані в нормальній формі Коші. Показано, що такі моделі є найбільш ефективними для аналізу різноманітних режимів роботи. Розв'язок диференціальних рівнянь реалізується із застосуванням числових методів з допомогою комп'ютерної техніки.

**Ключові слова:** математична модель, випрямляч, однофазні випрямляч та інвертор, ключ, алгебраїчні та диференціальні рівняння.

**В.В. Лышук, Н.Н. Евсюк, И.Р. Селепина, Н.Ю. Копилец.** Математические модели устройств преобразовательной техники. В статье предложены математические модели однофазных мостовых выпрямителя и инвертора, дифференциальные уравнения которых записаны в нормальной форме Коши. Показано, что такие модели являются наиболее эффективными для анализа различных режимов работы. Решение дифференциальных уравнений реализуется с применением численных методов с помощью компьютерной техники.

**Ключевые слова:** математическая модель, однофазные выпрямитель и инвертор, ключ, алгебраические и дифференциальные уравнения.

**V.V. Lyshuk, M.M. Yevsiuk, Y.R. Selepyna, N.Yu. Kopylets'.** Mathematical models of converting equipment devices. The article proposes mathematical models of single-phase bridge rectifiers and inverters whose differential equations are written in the normal Cauchy form. Such models have been shown to be most effective for analyzing different operating modes. The solution of differential equations is implemented using numerical methods using computer technology.

**Keywords:** mathematical model, rectifier, single-phase rectifier and inverter, key, algebraic and differential equations.

**Постановка наукової проблеми.** На сьогодні задача випрямлення синусоїдного струму дуже часто зустрічається на практиці. Адже значна частина електроприймачів за своїм принципом роботи вимагає постійного струму. Це і електротранспорт, електротермічні установки, живлення автономного електроінструменту тощо. З іншого боку важливим завданням є також і показники якості (пульсації, коливання) вихідних параметрів, зокрема струмів та напруг.

Аналогічно зворотня задача інвертування електроенергії використовується так само широко, як і випрямлення. Якість інвертованої напруги визначається в основному двома видами модуляцій: амплітудно-імпульсній (АІМ) та широтно-імпульсній (ШІМ). З іншого боку впровадження інверторів пов'язане з розвитком відновлюваних джерел електроенергії, де виникає задача інвертування генерованої постійної напруги, що накопичується в акумуляторах, в змінну синусоїдну для живлення промислових приймачів, і приєднання паралельно до енергетичної системи [1, 2].

Тому створення математичних моделей таких пристроїв, які б максимально відображали фізичні процеси перетворення електроенергії з найменшими похибками і затратами комп'ютерного часу щодо симуляції набуває особливої актуальності.

**Аналіз досліджень.** Математичне моделювання є потужним інструментом при дослідженні та аналізі електротехнічних та електронних пристроїв. Диференціальні рівняння, які є основою побудови таких моделей, розв'язуються явними чи неявними числовими методами з допомогою персональних комп'ютерів. Це так звана комп'ютерна симуляція типових режимів їх роботи [3, 4].

Використовуючи загальну теорію диференціальних рівнянь в області електротехніки розроблені методи побудови математичних моделей електротехнічних пристроїв, які дадуть змогу, використовуючи один і той же математичний апарат, знайти розв'язки у часовій області різноманітних електротехнічних перехідних процесів [4].

Чисельні методи є потужним інструментом розв'язання диференціальних рівнянь і знаходять все ширше застосування при аналізі електродинамічних процесів. Інженери-електротехніки, які мають справу з різними електротехнічними пристроями, повинні вміти складати рівняння їх динаміки. Математичний апарат полягає в поданні диференціальних рівнянь електромагнітного стану

в нормальній формі Коші, що дасть змогу мінімізувати затрати комп'ютерного часу та підвищити точність результатів [3].

Аналізуючи розв'язок диференціальних рівнянь, а саме часові графічні залежності можна уникнути багатьох аварійних режимів. З іншого боку натурний експеримент може бути нереалізованим із-за дороговизни обладнання.

**Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.**

Розглянемо методику побудови моделі на прикладі однофазного мостового інвертора, а саме формування диференціальних рівнянь. Залежно від параметрів електричної схеми можна отримати різні форми вихідного сигналу, зокрема й близькі до форми синусоїди. Подання роботи напівпровідникових вентилів за схемою ідеального ключа значно спрощує алгоритм аналізу та зменшує кількість обчислювальних операцій [2].

Однофазний випрямляч складається з однофазного понижувального трансформатора з насиченою магнітною системою, напівпровідникових діодів, С-фільтра та індуктивно-активного навантаження. Принципова схема такого пристрою зображена на рис.1.

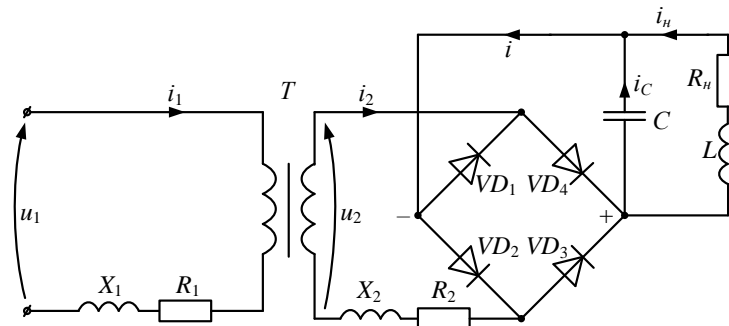


Рис.1. Електрична схема випрямляча.

Рівняння обмоток трансформатора запишемо за II законом Кірхгофа

$$e_k = \frac{d\psi_k}{dt} = u_k - i_k \cdot R_k, \tag{1}$$

$$i_k = \alpha_k (\psi_k - w_k \cdot \Phi), \quad k = 1, 2. \tag{2}$$

Тут  $\alpha_k = \frac{1}{L_k} = \frac{\omega}{X_k}$  – обернена індуктивність розсіяння обмоток,  $\Gamma\text{н}^{-1}$ ,  $\psi_k$ ,  $w_k \cdot \Phi$  – основні та

робочі потокозчеплення обмоток відповідно, Вб.

При наявності згладжуючого конденсатора можливий режим, коли всі діоди закриті. Тому рівняння стану магнітопроводу запишемо так

$$w_1 i_1 + \chi w_2 i_2 = \rho' \Phi, \tag{3}$$

де  $\chi$  – логічна змінна, яка приймає значення 0 або 1 (на проміжку відкритих діодів  $\chi = 1$ , на проміжку закритих діодів  $\chi = 0$ ),  $\rho'$  – статичний магнітний опір осердя трансформатора, що визначається з кривої намагнічення сталі  $B = f(H)$  або  $V = f(\Phi)$ .

Продиференціювавши (2), (3) за часом і використавши (1) отримаємо рівняння трансформатора в остаточному вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \sum_{k=1}^2 d_k (u_k - i_k \cdot R_k); \\ \frac{di_2}{dt} &= \sum_{k=1}^2 a_k (u_k - i_k \cdot R_k). \end{aligned} \tag{4}$$

Тут введено позначення таких коефіцієнтів

$$d_1 = w_1 \cdot \alpha_1 \cdot \lambda; \quad d_2 = \chi \cdot w_2 \cdot \alpha_2 \cdot \lambda; \quad \lambda = \frac{1}{(\rho' + w_1^2 \alpha_1 + w_2^2 \alpha_2)}; \quad a_1 = -w_2 \cdot \alpha_2 \cdot d_1; \quad a_2 = \alpha_2 (1 - w_2 \cdot \alpha_2 \cdot d_2). \tag{5}$$

Інтегруючи (4), знаходимо магнітний потік і струм вторинної обмотки трансформатора. Струм первинної обмотки знаходимо згідно рівняння (3)

$$i_1 = \frac{(\rho' \Phi(\Phi) - \chi W_2 i_2)}{w_1}. \quad (6)$$

Напругу первинної обмотки трансформатора  $u_1$  вважаємо заданою синусоїдною, а напругу  $u_2$ , що є такою ж як на конденсаторі  $u_C$  або ЕРС вторинної обмотки на проміжку часу закритих діодів визначимо з рівняння

$$u_2 = u_C = e = w_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7)$$

На проміжку відкритих вентилів  $\chi = 1$ . Початок цього режиму триває доти, поки не виконається умова

$$u_C \pm w_2 \frac{d\Phi}{dt} \geq 0. \quad (8)$$

Знак «+» відповідає додатній півхвилі попереднього струму  $i_2$ , «-» – від'ємній півхвилі. Рівняння конденсатора та навантаження мають вигляд

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i - i_n}{C}; \quad \frac{di_n}{dt} = \frac{u_C - iR_n}{L_n}. \quad (9)$$

Аналіз перехідних процесів однофазного випрямляча пов'язаний з інтегруванням диференціальних рівнянь (4), (9).

Розглянемо алгоритм розрахунку перехідних процесів у змодельованому однофазному мостовому випрямлячі.

1. Маючи поточне значення (на першому кроці початкове) значення потоку  $\Phi$  обчислюємо статичний магнітний опір магнітопроводу трансформатора за характеристикою намагнічування відомої марки сталі.

2. Маючи поточні значення (на першому кроці початкові) значення напруги  $u_C$ ,  $i_n(t)$   $i_2(t)$  перевіряємо умову  $i_2 = 0$ . Якщо вона задовольняється, то присвоюємо  $\chi = 0$ , якщо ні, то  $\chi = 1$ .

3. За даними пунктів 1, 2 та за рівнянням (3) визначаємо струм  $i$  і обчислюємо відповідно похідні в рівняннях (4), (9).

4. За даними пункту 3 перевіряємо умову відкриття діодів (7). Якщо вона задовольняється, то  $\chi = 1$ , в іншому випадку – присвоюємо попереднє значення.

5. Інтегруємо рівняння (4), (9) на наступному кроці і отримуємо приріст невідомих.

6. Інтегрування продовжуємо до тих пір, поки  $t < t_{end}$ .

Кількість змінних стану моделі в процесі інтегрування змінюється від комутації до комутації від чотирьох до трьох ( $\Phi$ ,  $U_C$ ,  $i_n$ ,  $i_2$  при відкритих діодах та  $\Phi$ ,  $U_C$ ,  $i_n$  при закритих діодах).

Перейдемо до формування математичної моделі інвертора. По суті процеси перетворення електроенергії тут є зворотніми, але замість некерованих діодів використано керовані від генератора імпульсів тиристри.

Однофазний інвертор складається з джерела живлення з дроселем, однофазного трансформатора з насиченою магнітною системою, напівпровідникових тиристорів, що керуються генератором імпульсів, комутуючого конденсатора  $C_k$  та індуктивно-активного навантаження.

Генератор імпульсів та комутуюча ємність задають частоту напруги на навантаженні. Принципова схема інвертора, що відповідатиме нашій моделі зображена на рис.2.

Рівняння обмоток трансформатора запишемо за II законом Кірхгофа [3]

$$\frac{d\psi_1}{dt} = u_C - i_1 \cdot R_1, \quad (10)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = (-R_2 + R_n) i_2, \quad (11)$$

Струми обмоток знаходимо з рівняння (2).

Рівняння електромагнітного стану (намагнічувальних сил) запишемо подібно до (3)

$$w_1 i_1 + w_2 i_2 = F = \rho' \Phi. \quad (12)$$

Тиристор змодельовано ідеальним ключем [2], що змінюватиме структуру електричного кола. При цьому для кожної окремої комбінації відкритих і закритих тиристорів необхідно записати свою систему алгебро-диференціальних рівнянь. Це дещо створює складності при аналізі роботи таких пристроїв, але завжди можна звести множину систем таких алгебро-диференціальних рівнянь до однієї системи, вівши додаткові логічні змінні.

Робота такого інвертора визначається коливними процесами заряду і розряду комутуючого конденсатора. Відкриваючи тиристори T2, T4 струм протікає через конденсатор і первинну обмотку трансформатора, що в свою чергу створить струм на навантаженні.

Коли напруга на конденсаторі досягне максимального значення, тиристори T2, T4 закриються. Для того, щоб форма кривої струму навантаження була якомога ближчою до синусоїдальної, в цей момент необхідно відкрити тиристори T1, T3.

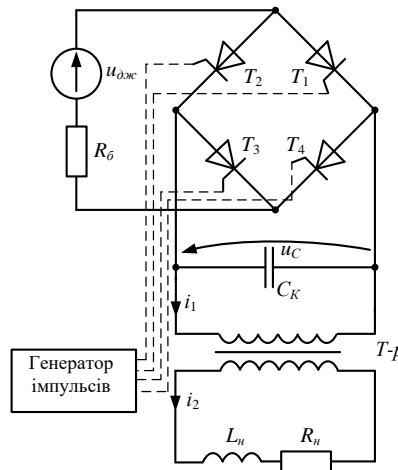


Рис.2. Електрична схема інвертора.

Рівняння напруги комутуючого конденсатора має вигляд

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{\chi u - u_C - i_1}{C_K}, \quad (13)$$

де  $u_{дж}$  – напруга джерела,  $\chi$  – логічна константа, що приймає значення  $\chi = \pm 1$ , залежно від того, яка пара тиристорів відкрита.

Рівняння (5) дає змогу моделювати попарну роботу тиристорів T1, T3 в перший півперіод ( $\chi = 1$ ) і T2, T4 в другий півперіод ( $\chi = -1$ ).

Така модель можлива завдяки тому, що заряджений протягом півперіоду конденсатор при подачі від генератора імпульсів керуючого імпульсу напруги на тиристори T2, T4 закриває тиристори T1, T3.

Така робота мостової схеми еквівалентна миттєвій зміні полярності джерела напруги на початку наступного півперіоду відносно клем комутуючого конденсатора.

Отже, для змінної  $\chi$  можемо записати умову

$$\chi = \begin{cases} 1, & \text{якщо } nT \leq t < nT + 0,5T, \\ -1, & \text{якщо } nT + 0,5T \leq t < (n+1)T, \end{cases} \quad (14)$$

де  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $T$  – період.

Диференціюючи за часом (3), (12) і розв'язуючи отриману систему рівнянь відносно невідомих згідно (10) отримуємо остаточно

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \alpha_1 (u_C - i_1 \cdot R_1) + \alpha_{12} (R_n + R_1) i_2; \\ \frac{di_1}{dt} &= \alpha_{21} (u_C - i_1 \cdot R_1) + \alpha_{22} (R_n + R_1) i_2, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$a_1 = w_1 \alpha_1 \lambda; \quad a_{12} = -w_2 \alpha_2 \lambda; \quad \lambda = \frac{1}{(\rho' + w_1^2 \alpha_1 + w_2^2 \alpha_2)}; \quad a_{21} = \alpha_1 (1 - w_1 a_1); \quad a_{22} = -\alpha_1 w_1 a_{12}. \quad (16)$$

Тут  $w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2, \lambda$  – відповідно числа витків, обернені індуктивності обмоток, причому  $\alpha_2$  включає в себе й індуктивність навантаження,  $\lambda$  – сумарна магнітна провідність.

Інтегруючи (15), знаходимо магнітний потік і струм вторинної обмотки трансформатора. Струм вторинної обмотки знаходимо згідно рівняння (3)

$$i_2 = \frac{(\rho' \Phi - w_1 i_1)}{w_2}. \quad (17)$$

Рівняння конденсатора та навантаження мають вигляд

$$i_C = \frac{(\chi u_{дж} - u_C)}{R_\sigma} - i_1. \quad (18)$$

Аналіз перехідних процесів однофазного інвертора пов'язаний з інтегруванням диференціальних рівнянь (13), (15).

І насамкінець, розглянемо алгоритм розрахунку перехідних процесів у інверторі.

1. Маючи поточне значення (на першому кроці початкове) значення потоку  $\Phi$  обчислюємо статичний магнітний опір магнітопроводу трансформатора за характеристикою намагнічування відомої марки сталі  $V = f(\Phi)$ .

2. Маючи поточні значення (на першому кроці початкові) значення напруги  $u_C, i_2(t)$  перевіряємо умову  $i_2 = 0$ . Якщо вона задовольняється, то присвоюємо  $\chi = -1$ , якщо ні, то  $\chi = 1$ .

3. За даними пунктів 1, 2 та за рівнянням (3) визначаємо струм і обчислюємо відповідно похідні в рівняннях (13), (15).

4. За даними пункту 3 перевіряємо умову відкриття тиристорів (14). Якщо вона задовольняється, то  $\chi = 1$ , в іншому випадку – присвоюємо попереднє значення.

5. Інтегруємо рівняння (13), (15) на наступному кроці і отримуємо приріст невідомих.

6. Інтегрування продовжуємо до тих пір, поки  $t < t_{end}$ .

**Висновки та перспективи подальшого дослідження.** Основною перевагою математичної моделі мостового інвертора є те, що диференціальні рівняння стану записані в нормальній формі Коші. Це максимально спрощує найважливіший етап дослідження – обчислювальний процес в процесі комп'ютерної симуляції. Саме завдяки цьому одержано практичну можливість аналізу перехідних процесів у електротехнічних пристроях, зокрема у однофазних мостових випрямлячах та інверторах. Інтегрування системи диференціальних рівнянь можна здійснити з допомогою комп'ютерних програм відомими явними методами, зокрема методами Ейлера або Рунге-Кутта.

#### Список бібліографічного опису

1. Волков И.В. Математические модели многоканальных инверторов с улучшенным спектральным составом выходного напряжения // И.В. Волков, Д.П. Каршенов // Техническая электродинамика. – 2015. – № 1. – С. 14-20.
2. Дзелендзяк У. Режими роботи однофазного тиристорного інвертора в системах керування / У. Дзелендзяк, В. Самогий, А. Павелчак // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – 2007. – № 598: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – С. 26-30.
3. Чабан В. Математичне моделювання електромеханічних процесів / В. Чабан. – Львів : Видавництво Державного університету „Львівська політехніка”, 1997. – 342 с.
4. Чабан В. Чисельні методи / В. Чабан. Львів: Видавництво Національного університету „Львівська політехніка”, 2001. – 186 с.

#### References

1. Volkov I.V. Mathematical models of multichannel inverters with improved spectral composition of output voltage // I.V. Volkov, D.P. Karshenov // Technical electrodynamics. – 2015. - № 1. - P. 14-20.
2. Dzelendziak U. Modes of operation of a single-phase thyristor inverter in control systems / U. Dzelendziak, V. Samothy, A. Pavelchak // Bulletin of the National university "Lviv Polytechnic". – 2007. – № 598: Computer sciences and information technologies. – С. 26-30.
3. Tchaban V. Mathematical modeling of electromechanical processes / V. Tchaban. – Lviv: Publisher of the State university "Lviv Polytechnic", 1997. – 342 p.
4. Tchaban V. Numerical methods / V. Tchaban. – Lviv: Publisher of the National university "Lviv Polytechnic". 2001. – 186 p.